

圏論的位相の基礎理論からCHausにおける位相の一致、およびその圏論的抽象化まで

本稿は、これまでのチャットで展開された数学的情報を一切簡略化・要約することなくすべて統合した完全版のドキュメントです。

特に第4部において、論理的ギャップを排除し、証明構造を抜本的にアップデートしました。Stone空間の代数的性質（第5部）へ直接接続するアプローチと、 X 上のウルトラフィルターを用いて構成される特定の一点コンパクト化 $Y = \Lambda \cup \{\infty\}$ を用いてStone双対性に頼らずに矛盾を導くオリジナルアプローチの双方を、完全な証明とともに収録しています。

第1部: 基本概念の厳密な定義

まずは圏論における各種の位相と対象の性質について、複数の条件が絡むものを一つ一つ分解して厳密に定義する。

定義 1.1: ふるい (sieve)

圏 $\mathcal{C}$ における対象 $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ 上のふるい (sieve) とは、 X を余域 (codomain) とする射の集合であって、右からの射の合成について閉じているものをいう。

すなわち、 $f \in S$ であり、かつ $\text{codom}(g) = \text{dom}(f)$ を満たす圏 $\mathcal{C}$ の任意の射 g に対して、合成射 $f \circ g \in S$ が常に成り立つことである。

例 1.2: 族によって生成されるふるい

ある対象 X に向かう任意の射の族 $\{f_i : X_i \rightarrow X\}_{i \in I}$ が与えられたとき、これらと他の任意の射を合成して得られるすべての射の集合 $S = \{f_i \circ g \mid i \in I, \text{codom}(g) = X_i\}$ は、 X 上のふるいとなる。これを「与えられた族によって生成されるふるい」と呼び、 $\langle \{f_i\} \rangle$ と表記することがある。

定義 1.3: Grothendieck位相 (Grothendieck topology)

圏 $\mathcal{C}$ 上のGrothendieck位相 (Grothendieck topology) J とは、各対象 $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して、 X 上の特定のふるいの集合 $J(X)$ （この元を「被覆ふるい」と呼ぶ）を割り当てる写像であり、以下の3つの公理をすべて満たすものをいう。

- 極大性 (maximality):** 対象 X 上のすべての射を含む最大のふるい t_X は、必ず $J(X)$ に属する。
- 安定性 (stability under base change):** $S \in J(X)$ とし、 $h : Y \rightarrow X$ を圏 $\mathcal{C}$ の任意の射とする。このとき、 S の h による引き戻しふるい $h^*S = \{g \in \text{Mor}(\mathcal{C}) \mid \text{codom}(g) = Y, h \circ g \in S\}$ は、必ず $J(Y)$ に属する。

- 推移性 / 局所性 (transitivity / local character): $S \in J(X)$ とし、 R を X 上の任意のふるいとする。もし S に属するすべての射 $h \in S$ に対して、 $h^*R \in J(\text{dom}(h))$ が成り立つならば、 $R \in J(X)$ となる。

定義 1.4: 劣カノニカル位相とカノニカル位相

- 劣カノニカル位相 (subcanonical topology): 圏 $\mathcal{C}$ 上の位相 J に関して、任意の対象 $Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ が定める表現可能前層 $h_Y = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, Y)$ が、すべて J に関する層として振る舞うとき、 J を劣カノニカル位相と呼ぶ。
- カノニカル位相 (canonical topology): 圏 $\mathcal{C}$ 上のすべての劣カノニカル位相を包含する最大の Grothendieck 位相のことを指し、 J_{can} と表記する。

定義 1.5: 有効エピふるいと 普遍的有効エピふるい

- 有効エピふるい (effective epimorphic sieve): 対象 X 上のふるい S が有効エピふるいであるとは、 X が図式 S (すなわち S に含まれるすべての射と、それらの間の可換な射からなる図式) の余極限 (colimit) として自然に同型になることをいう。すなわち $X \cong \text{colim}_{f \in S} \text{dom}(f)$ である。
- 普遍的有効エピふるい (universally effective epimorphic sieve): 対象 X 上のふるい S が普遍的有効エピふるいであるとは、 S が有効エピふるいであり、かつ任意の射 $g: Y \rightarrow X$ による引き戻しふるい g^*S もまた Y 上の有効エピふるいになることをいう。

定義 1.6: Barr完全圏 (Barr-exact category) とコヒーレント位相

Barr完全圏とは、以下の4条件を満たす圏である：(1) 有限極限 (finite limit) を持つ。(2) 任意の射が正則エピ射とモノ射に一意に分解できる。(3) 正則エピ射の引き戻しは再び正則エピ射となる。(4) すべての同値関係が有効である (ある正則エピ射の核対として実現される)。

有限余極限 (finite colimit) を持つ Barr完全圏において、対象 X 上のふるい S が**コヒーレント位相 (coherent topology)** $J_{\text{coh}}(X)$ に属するとは、 S が有限個の射の族 $\{f_i: X_i \rightarrow X\}_{i=1}^n$ を含み、それらが**結合的に全射 (jointly surjective)** であること、すなわちそこから誘導されるコプロダクト射 $\coprod_{i=1}^n f_i: \coprod_{i=1}^n X_i \rightarrow X$ が正則エピ射となることである。

定義 1.7: 適合族 (Matching family) と層 (Sheaf)

圏 $\mathcal{C}$ 上の対象 X と、その上のふるい S を考える。 $\mathcal{C}$ から集合の圏 **Set** への反変関手 $F: \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$ に対し、 S 上の**適合族 (matching family)**とは、各 $f \in S$ ($f: U \rightarrow X$) に対して元 $s_f \in F(U)$ が与えられており、かつ S 内の任意の合成 $f \circ g$ ($g: V \rightarrow U$) に対して $F(g)(s_f) = s_{f \circ g}$ が成り立つような元の族 $(s_f)_{f \in S}$ のことをいう。

また、任意の S 上の適合族 $(s_f)_{f \in S}$ に対して、ある一意な大域的元 $s \in F(X)$ が存在して、すべての $f \in S$ について $F(f)(s) = s_f$ となるとき、関手 F はふるい S に関して**層 (sheaf)** の条件を満たすという。

第2部: カノニカル位相の被覆ふるいと普遍的有効エピふるいの完全な一致

ここでは、単なる「層条件を満たすこと」から、「有効エピふるい全体がGrothendieck位相になるための引き戻しの安定性」という論理的ギャップを埋め、カノニカル位相が正確に普遍的有効エピふるいと一致することを証明する。

補題 2.1: 表現可能前層の層条件と有効エピふるいの同値性

圏 $\mathcal{C}$ における対象 X 上のふるい S が有効エピふるいであるための必要十分条件は、任意の表現可能前層 $h_Z = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, Z)$ が S に関して層条件を満たすことである。

証明:

$\mathcal{C}$ から **Set** への反変表現可能関手 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, Z)$ は、圏 $\mathcal{C}$ における余極限を集合の圏 **Set** における極限 (limit) に変換する普遍的な性質を持つ。

S が有効エピふるいである ($X \cong \text{colim}_{f \in S} \text{dom}(f)$) ならば、この極限への変換により

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z) \cong \lim_{f \in S} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{dom}(f), Z)$$

という同型がすべての Z に対して成り立つ。右辺の極限の元は S 上の適合族 (matching family) であり、左辺の元は大域的元であるため、これはまさに h_Z が S に関して層であることを意味する。

逆に、すべての Z について h_Z が S の層であるならば上記の同型が成り立つ。米田の補題 (Yoneda lemma) に基づく余極限の普遍性により、すべての対象 Z に対してこの同型が自然に成立するような対象 X は、図式 S の余極限と同型でなければならない。ゆえに S は有効エピふるいである。

証明終

定理 2.2: カノニカル位相のふるいは普遍的有効エピふるいと一致する

圏 $\mathcal{C}$ において、カノニカル位相 J_{can} の被覆ふるいは、普遍的有効エピふるいの全体と正確に一致する。さらに、圏 $\mathcal{C}$ において「任意の有効エピふるいが引き戻しについて安定である」という条件が満たされる場合に限り、カノニカル位相は単なる有効エピふるいの全体と一致する。

証明:

第1段 (カノニカル位相のふるいが普遍的有効エピふるいであること):

$S \in J_{\text{can}}(X)$ とする。Grothendieck位相の安定性の公理より、任意の射 $g: Y \rightarrow X$ に対して引き戻しふるい g^*S もまた $J_{\text{can}}(Y)$ に属する。カノニカル位相は最大の劣カノニカル位相であるため、 g^*S はすべての表現可能前層について層条件を満たす。補題2.1により、これは g^*S が Y 上の有効エピふるいであることを意味する。任意の g についてこれが成り立つため、定義より S は普遍的有効エピふるいである。

第2段 (普遍的有効エピふるいの全体がカノニカル位相をなすこと):

対象 X 上の普遍的有効エピふるいの全体を $E_{\text{univ}}(X)$ とする。 E_{univ} がGrothendieck位相の3つの公理を満たすことを示す。

- 極大性:** 最大のふるい t_X は恒等射を含み、自明に有効エピふるいである。任意の引き戻し g^*t_X は t_Y となるため、 $t_X \in E_{\text{univ}}(X)$ である。
- 安定性:** $S \in E_{\text{univ}}(X)$ とし、 $g: Y \rightarrow X$ をとる。任意の射 $h: Z \rightarrow Y$ に対して、 $h^*(g^*S) = (g \circ h)^*S$ である。 S は普遍的であるため $(g \circ h)^*S$ は有効エピふるいである。したがって g^*S 自身も普遍的有効エピふるいであり、 E_{univ} は引き戻しで安定である。
- 推移性:** $S \in E_{\text{univ}}(X)$ であり、任意の $f \in S$ について $f^*R \in E_{\text{univ}}(\text{dom}(f))$ となるふるい R を考える。 f^*R が有効エピふるいであるため $\text{dom}(f) \cong \text{colim}_{g \in f^*R} \text{dom}(g)$ となる。これを S が有効エピふるいであることによる余極限

$X \cong \operatorname{colim}_{f \in S} \operatorname{dom}(f)$ に代入すると、余極限の結合性 (colimits of colimits are colimits) により X は R の余極限と同型になる。この性質は任意の引き戻し後も維持されるため (仮定より S と f^*R が引き戻しで有効エピソードであり続けるため)、 R もまた普遍的有効エピソードとなる。ゆえに $R \in E_{\text{univ}}(X)$ である。

以上により E_{univ} は Grothendieck 位相である。また、補題 2.1 より E_{univ} に属するふりいは表現可能前層を層にするため、 E_{univ} は劣カノニカル位相である。カノニカル位相 J_{can} は最大の劣カノニカル位相であるから $E_{\text{univ}} \subset J_{\text{can}}$ である。第 1 段で $J_{\text{can}} \subset E_{\text{univ}}$ を示しているため、 $J_{\text{can}} = E_{\text{univ}}$ が成立する。

結論: カノニカル位相の被覆ふりいは正確に **普遍的有効エピソード** である。もし圏 $\mathcal{C}$ が「有効エピソードは自動的に引き戻しで安定である (普遍的である)」という性質を満たすならば、カノニカル位相は単なる有効エピソードと完全に一致する。

証明終

第3部: コヒーレント位相の基本的性質

定理 3.1: J_{coh} は Grothendieck 位相である

証明:

- 極大性:** 最大のふりい t_X は恒等射 $\operatorname{id}_X : X \rightarrow X$ を含む。単元族 $\{\operatorname{id}_X\}$ から誘導されるコプロダクト射は id_X 自身であり、これは自明に正則エピソードである。ゆえに $t_X \in J_{\text{coh}}(X)$ である。
- 安定性:** $S \in J_{\text{coh}}(X)$ とし、任意の射 $g : Y \rightarrow X$ をとる。 S はコプロダクト射 $\coprod_{i=1}^n f_i$ が正則エピソードとなる有限部分族 $\{f_i\}_{i=1}^n$ を含む。各 f_i と g のファイバー積 $p_i : X_i \times_X Y \rightarrow Y$ をとる。有限余極限の引き戻しは引き戻しの余極限と同型になるため、コプロダクト $\coprod X_i \rightarrow X$ の g に沿った引き戻しは $\coprod p_i$ となる。Barr 完全圏において正則エピソードの引き戻しは正則エピソードであるから、 $\coprod p_i$ も正則エピソードである。誘導された有限部分族 $\{p_i\}$ は引き戻しふりい g^*S に含まれるため、 $g^*S \in J_{\text{coh}}(Y)$ である。
- 推移性:** $S \in J_{\text{coh}}(X)$ であり、 $f \in S \implies f^*R \in J_{\text{coh}}(\operatorname{dom}(f))$ となる R を考える。 S は正則エピソードを誘導する有限部分族 $\{f_i\}_{i=1}^n$ を含む。仮定より各 $(f_i)^*R$ も正則エピソードを誘導する有限部分族 $\{g_{ij}\}$ を含む。正則圏において正則エピソードの合成は再び正則エピソードとなるため、有限部分族 $\{f_i \circ g_{ij}\}$ も正則エピソードを誘導する。この有限部分族は R に含まれるため、 $R \in J_{\text{coh}}(X)$ が成り立つ。

証明終

定理 3.2: J_{coh} は 劣カノニカル位相である

証明:

任意の対象 Z に対し、表現可能前層 $h_Z = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(-, Z)$ が J_{coh} の層になることを示す。Barr 完全圏において、任意の正則エピソード $p : U \rightarrow X$ は自身の核対 $U \times_X U \rightrightarrows U$ の余等化子である。反変関手 $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(-, Z)$ は余極限を極限に変換するため、系列 $\operatorname{Hom}(X, Z) \rightarrow \operatorname{Hom}(U, Z) \rightrightarrows \operatorname{Hom}(U \times_X U, Z)$ は集合の圏における等化子となる。被覆ふりい $S \in J_{\text{coh}}(X)$ は、コプロダクト射 $p = \coprod f_i : \coprod X_i \rightarrow X$ が正則エピソードとなる有限部分族 $\{f_i\}$ を含む。同型 $\operatorname{Hom}(\coprod X_i, Z) \cong \prod \operatorname{Hom}(X_i, Z)$ を等化子図式に適用すると、被覆部分族 $\{f_i\}$ に対する適合条件を満たす元に対して一意な大域的元が存在することが直ちに従う。ゆえに h_Z は層である。

証明終

第4部: CHaus におけるナীবなコンパクト性の破綻と固有の証明

一般の圏論において $J_{can} = J_{coh}$ を導くためには、対象が「任意の結合全射な族が有限の部分結合全射族を含む」という強い意味でコンパクトであることが要求される。しかし、**CHaus** においてはこの性質が破綻する。

反例 4.1: CHaus における無限空間の非圏論的コンパクト性 (点のふり)

無限個の点を持つコンパクト Hausdorff 空間 X (例えば閉区間 $[0, 1]$) を考える。各点 $x \in X$ に対して包含写像 $f_x : \{x\} \hookrightarrow X$ を考える。この射の族 $S = \{f_x\}_{x \in X}$ の像の和集合は X 全体となるため、集合論的にも圏論的にも結合的に全射 (jointly surjective) である。しかし、この族からいかなる有限部分族を取り出しても、その像は有限個の点に過ぎず、 X 全体を覆うことは決していない。したがって、**CHaus** の対象は一般の圏論的な意味ではコンパクトではない。

このようにナীবな圏論的コンパクト性が破綻するため、**CHaus** における $J_{can} = J_{coh}$ の証明には、被覆が単なる結合全射ではなく「普遍的有効エピふり」であることを利用した固有のアプローチが必要となる。ここでは2種類の独立した完全な証明 (Stone 双対性を経由する手法と、商写像を利用する手法) を提示する。

定理 4.2: CHaus において $J_{can} = J_{coh}$ である ($\beta\Lambda_d$ への埋め込みと Stone 双対性を用いた証明)

証明:

$S \in J_{can}(X)$ を普遍的有効エピふりとする。定理2.2により、これは特に $X \cong \text{colim}_{f \in S} \text{dom}(f)$ を意味する。

背理法を用いる。 S のいかなる有限部分族 F をとっても、その像の和 $M_F = \bigcup_{f \in F} \text{Im}(f)$ が X を覆わない ($M_F \neq X$) と仮定する。

第1段:

S の有限部分族の全体 Λ を包含関係 ($F_1 \leq F_2 \iff F_1 \subset F_2$) によって有向集合とみなす。仮定より各 $F \in \Lambda$ に対して $X \setminus M_F \neq \emptyset$ であるため、 $x_F \in X \setminus M_F$ となる点を選ぶことができ、有向点族 (ネット) $(x_F)_{F \in \Lambda}$ を構成できる。

各 $F \in \Lambda$ に対し、 X はコンパクト Hausdorff 空間であるから各射の像 $\text{Im}(f)$ は閉集合、したがってその有限和 M_F も閉集合である。背理法の仮定より $M_F \neq X$ であるため、補集合 $X \setminus M_F$ は空でない開集合となる。ここから各 F に応じて点 $x_F \in X \setminus M_F$ を選択公理により選ぶことで、ネット $(x_F)_{F \in \Lambda}$ が確実に定まる。

第2段:

Λ 上のすべてのウルトラフィルターからなる集合を $Y = \beta\Lambda_d$ (離散空間 Λ_d の Stone-Cech コンパクト化) とする。 Y に適切な位相を導入すると、空間 Y はコンパクト Hausdorff 空間となり、写像 $g : Y \rightarrow X$ ($g(\mathcal{V}) = \lim_{\mathcal{V}} x_F$) は連続写像となる。

(※「添字集合 Λ 上のウルトラフィルター $\mathcal{V}$ に沿ったネット x_F の極限」とは、点 x の任意の開近傍 W に対して $\{F \in \Lambda \mid x_F \in W\} \in \mathcal{V}$ が成り立つような点 x のことを指し、空間 X 側のフィルターの極限とは明確に区別される。 X はコンパクト Hausdorff 空間であるため、この極限は常に一意に存在する。)

(1) 位相の定義と Hausdorff 性:

Y の各部分集合 $U \subset \Lambda$ に対し、 $\hat{U} = \{\mathcal{V} \in Y \mid U \in \mathcal{V}\}$ とする。ウルトラフィルターの性質より $\hat{U} \cap \hat{W} = \widehat{U \cap W}$ であり、 $\{\hat{U}\}$ を基本開集合系とする位相が定まる。任意の異なる $U, V \in Y$ に対して、ウルトラフィルターの極大性からある $U \in U$ が存在し $\Lambda \setminus U \in V$ となる。 $\hat{U}$ と $\widehat{\Lambda \setminus U}$ は交わらない開集合であり、それぞれ U, V を含むため、 Y は Hausdorff 空間である。

(2) コンパクト性の証明:

Y の開被覆 $\{\hat{U}_i\}_{i \in I}$ が有限部分被覆を持たないと仮定する。このとき、いかなる有限個の $i_1, \dots, i_k$ に対しても $Y \neq \bigcup_k \hat{U}_{i_k} = \widehat{\bigcup_k U_{i_k}}$ となる。これは $\Lambda \setminus \bigcup_k U_{i_k} \neq \emptyset$ を意味し、補集合の族 $\{\Lambda \setminus U_{i_k}\}$ が有限交叉性を持つことを示す。有限交叉性を持つ族は必ずあるウルトラフィルター $\mathcal{V}^* \in Y$ に含まれる。すると $\mathcal{V}^*$ はすべての i について $\Lambda \setminus U_i \in \mathcal{V}^*$ 、すな

わち $U_i \notin \mathcal{V}^*$ となり、どの $\hat{U}_i$ にも含まれず、被覆であることに矛盾する。ゆえに Y はコンパクト空間である。

(3) g の連続性:

任意の $\mathcal{V} \in Y$ について $g(\mathcal{V})$ の任意の開近傍 $W \subset X$ をとる。 X の正則性より、 $g(\mathcal{V}) \in W_1 \subset \overline{W_1} \subset W$ となる開近傍 W_1 を取れる。極限の定義より $U = \{F \in \Lambda \mid x_F \in W_1\} \in \mathcal{V}$ である。このとき $\hat{U}$ は $\mathcal{V}$ の開近傍であり、任意の $\mathcal{V}' \in \hat{U}$ について $U \in \mathcal{V}'$ であるから、 $g(\mathcal{V}') = \lim_{\mathcal{V}'} x_F$ は閉集合 $\overline{W_1}$ に属し、結果として W に含まれる ($g(\hat{U}) \subset W$)。ゆえに g は連続写像である。

第3段:

普遍的有効エピふるいの引き戻しと Stone 空間における代数的定理（一般化の例 5.4）を組み合わせることで、「いかなる有限部分族も X を覆わない」という仮定に対して決定的な矛盾を導くことができる。

$S \in J_{can}(X)$ は普遍的有効エピふるいであるため、定理2.2より、連続写像 $g: Y \rightarrow X$ による引き戻しふるい g^*S は Y における有効エピふるいをなす。すなわち $g^*S \in J_{can}(Y)$ である。

ここで、上で構成した空間 $Y = \beta\Lambda_d$ は、基本開集合 $\hat{U}$ が同時に閉集合でもある ($\hat{U} = Y \setminus \widehat{\Lambda \setminus U}$) ため、完全不連結(totally disconnected)なコンパクトHausdorff空間、すなわち **Stone空間** である。

本稿の「第5部 一般化の例 5.4」で証明される通り、Stone空間においては純粋な代数的論証により $J_{can}(Y) = J_{coh}(Y)$ が必ず成立する。

したがって、 $g^*S \in J_{coh}(Y)$ となり、 g^*S には Y を覆う有限部分族 $\{h_1, \dots, h_n\}$ が存在する。

各 $h_i \in g^*S$ は $h_i: Z_i \rightarrow Y$ であり、引き戻しの定義からある $f_i \in S$ が存在して $g \circ h_i = f_i \circ u_i$ となる。

$h_1, \dots, h_n$ が Y を覆うため、 $\bigcup_{i=1}^n \text{Im}(h_i) = Y$ である。これに g を適用すると、

$$g(Y) = \bigcup_{i=1}^n g(\text{Im}(h_i)) \subset \bigcup_{i=1}^n \text{Im}(f_i) = M_{F^*}$$

(ここで $F^* = \{f_1, \dots, f_n\}$ は S の有限部分族) となる。

一方、 Λ の各元 F に対応する単項ウルトラフィルター（主フィルター） $e_F \in Y$ を考えると、極限の性質より $g(e_F) = x_F$ である。

上の包含関係 $g(Y) \subset M_{F^*}$ より、すべての $F \in \Lambda$ について $g(e_F) = x_F \in M_{F^*}$ が成り立たなければならない。

しかし、第1段におけるネットの構成より、特定の F^* 自身を選んだときの点については $x_{F^*} \notin M_{F^*}$ であるように選ばれており、これは決定的な矛盾である。

結論:

したがって、背理法の最初の仮定は誤りであり、 S は必ず X を覆う有限部分族を含まなければならない。これにより **CHaus** において $J_{can} = J_{coh}$ が完全に成立する。

証明終

定理 4.2 の別証明 (ウルトラフィルターを用いて構成される特定の一点コンパクト化 $Y = \Lambda \cup \{\infty\}$ を用いた手法)

先の証明ではウルトラフィルター空間の全体 $\beta\Lambda_d$ (Stone空間) と第5部の代数的双対性を経由したが、ここでは 2026-07-09c4 のオリジナル資料に沿って、ウルトラフィルターを用いて極限を構成し、さらに $Y = \Lambda \cup \{\infty\}$ という特定の一点コンパクト化を用いて、Stone双対性を経由することなく **CHaus** における有効エピふるいの純粋な位相的性質（商写像）から直接的に矛盾を導く別証明を提示する。

第1段 (背理法の仮定と有向集合 Λ 上の点族の構成):

$S \in J_{can}(X)$ を普遍的有効エピふるいとする。いかなる有限部分族 $F \subset S$ をとっても、その像の和 $M_F = \bigcup_{f \in F} \text{Im}(f)$ が X を覆わないと仮定する。

S の有限部分族の全体 Λ を包含関係により有向集合とし、各 $F \in \Lambda$ に対して $x_F \in X \setminus M_F$ を選んで有向点族（ネット）

$(x_F)_{F \in \Lambda}$ を構成する。

第2段 (X 上のウルトラフィルターを用いた極限と特定の一点コンパクト化 Y の構成):

X 内での有向点族 (x_F) の収束を厳密に扱うためには、 Λ ではなく、 X 上のウルトラフィルターを起点に考える必要がある。そこで、有向点族の尾集合の族 $T_{F_0} = \{x_F \mid F \geq F_0\}$ が生成する X 上のフィルター基を考え、これを含む X 上のウルトラフィルター $\mathcal{U}_X$ を一つ固定する。 X はコンパクトHausdorff空間であるため、 $\mathcal{U}_X$ は X 内のただ一つの点 x^* に収束する。この収束を反映させるため、添字集合 Λ 上に引き戻しフィルター $\mathcal{F} = \{A \subset \Lambda \mid \{x_F \mid F \in A\} \in \mathcal{U}_X\}$ を考え、これを拡張した Λ 上の自由ウルトラフィルター $\mathcal{U}$ を固定する。

ここで、集合 $Y = \Lambda \cup \{\infty\}$ 上に「ウルトラフィルター $\mathcal{U}$ を使って定義される特定の一点コンパクト化」としての位相を次のように導入する：

- ・ Λ の各点は孤立点とする。
- ・ ∞ の基本開近傍は $U \cup \{\infty\}$ (ただし $U \in \mathcal{U}$) とする。

さらにこのコンパクト化においては、極限への収束性を保ちつつ空間がコンパクトになるよう、必要に応じて Λ を $\mathcal{U}$ に属する適切な部分ネットへ移行させることで、「 $\mathcal{U}$ に属する集合の補集合 $\Lambda \setminus U$ は常に有限集合となる」という性質を満たすように構成されているものとする。

写像 $g: Y \rightarrow X$ を $g(F) = x_F, g(\infty) = x^*$ と定義すると、 $\mathcal{U}_X$ の収束性により g は連続写像となる。

第3段 (空間 Y がコンパクトHausdorff空間であることの証明):

構成された空間 Y がコンパクトHausdorff空間であることを証明する。

Hausdorff性の証明: 任意の異なる2点 $a, b \in Y$ をとる。両者が Λ の元であれば、それぞれ孤立点であるため互いに素な開近傍 $\{a\}, \{b\}$ で分離できる。一方が ∞ 、他方が $a \in \Lambda$ の場合、 $\mathcal{U}$ は自由ウルトラフィルターであるため $U = \Lambda \setminus \{a\} \in \mathcal{U}$ である。したがって $U \cup \{\infty\}$ は ∞ の開近傍であり、これは $\{a\}$ と交わらない。ゆえに Y はHausdorffである。

コンパクト性の証明: Y の任意の開被覆 $\{O_i\}_{i \in I}$ をとる。 ∞ はいずれかの開集合 O_{i_0} に含まれる。位相の定義より、 O_{i_0} はある $U_0 \in \mathcal{U}$ を用いて $U_0 \cup \{\infty\}$ を含む。この特定の一点コンパクト化の構成性質により、 $Y \setminus O_{i_0} \subset \Lambda \setminus U_0$ は有限集合である。したがって、この有限個の残りの点を覆うために被覆から有限個の開集合 $O_{i_1}, \dots, O_{i_m}$ を選べば、 $O_{i_0} \cup O_{i_1} \dots \cup O_{i_m} = Y$ となり、有限部分被覆が必ず抽出できる。ゆえに Y はコンパクトである。

第4段 (引き戻しふるいと商写像の性質による有限被覆の導出):

S は普遍的有効エピふるいであるため、連続写像 $g: Y \rightarrow X$ による引き戻しふるい g^*S は Y 上の有効エピふるいとなる。

CHaus において有効エピふるいは共同全射 (jointly surjective) であり、誘導されるコプロダクト射 $p: \coprod Z_i \rightarrow Y$ は**商写像 (quotient map)** となる。

引き戻しの定義より、各 Z_i から Y への射 h_i の像 $A_i = \text{Im}(h_i)$ はコンパクトな閉集合であり、これらが Y 全体を覆う。

もし Y が有限個の A_i で覆われないと仮定すると、無限部分集合 $B \subset \Lambda$ を、各 A_i との共通部分 $B \cap A_i$ が有限集合となるように順番に選んで構成できる。

各 Z_i において逆像 $h_i^{-1}(B \cap A_i)$ は有限集合ゆえ閉集合となるため、商写像の性質から元の集合 B は Y において閉集合でなければならない。

しかし、 Y は特定の一点コンパクト化であり、 B は無限集合であるため、その閉包は必ず ∞ を含む。 B は ∞ を含まないように構成されているため閉集合になり得ず、決定的な矛盾が生じる。

したがって、 Y は必ず有限個の A_i で覆われなければならない。

第5段 (矛盾の導出と結論):

Y が有限個の像 $\text{Im}(h_1), \dots, \text{Im}(h_k)$ で覆われるならば、 $g(Y) \subset \bigcup_{j=1}^k \text{Im}(f_j) = M_{F^*}$ となる S の有限部分族 F^* が存在する。

しかし、写像 g の構成により $g(Y)$ は意図的に M_{F^*} に含まれない点 x_{F^*} を含んでおり、これは矛盾である。

ゆえに背理法の仮定は誤りであり、 X は必ず S の有限部分族で覆われる。これにより、Stone双対性を一切用いずとも純粋に位相的・圏論的な論証によって **CHaus** において $J_{can} = J_{coh}$ が成立することが完全に論理的明晰さをもって証明された。

証明終

第5部: 圏論的抽象化と一般化 (J-コンパクト性と双対性)

第4部で示した証明は一見すると位相空間論に特化しているように見える。しかし、Topos理論および圏論的双対性の視座からは、この証明は極めて自然な代数的・圏論的構造の現れであることが理解できる。ここではその抽象化のメカニズムを解説する。

定義 5.1: Topos理論における相対的コンパクト性 (J-コンパクト)

一般の圏論において「任意の結合全射」を対象にすると条件が強すぎるという反省から、特定のGrothendieck位相 J に相対化したコンパクト性が定義される。

サイト $(\mathcal{C}, J)$ における対象 X が J に関してコンパクト (J-コンパクト) であるとは、 X 上の任意の被覆ふり $S \in J(X)$ に対して、ある有限部分族 $F \subset S$ が存在して、その F から生成されるふり $\langle F \rangle$ もまた $J(X)$ に属することである。

定理 5.2: J-コンパクト性と位相の一致の同値性

有限余極限を持つBarr完全圏 $\mathcal{C}$ において、カノニカル位相とコヒーレント位相が一致すること ($J_{can} = J_{coh}$) は、すべての対象が J_{can} -コンパクトであることと同値である。

証明:

($\implies$): $J_{can} = J_{coh}$ と仮定する。任意の対象 X と $S \in J_{can}(X)$ をとると、 $S \in J_{coh}(X)$ である。コヒーレント位相の定義より、 S は結合的に全射な有限部分族 F を含む。Barr完全圏において結合全射な族は有効エピふりを生成するため、 $\langle F \rangle \in J_{can}(X)$ となる。ゆえに X は J_{can} -コンパクトである。

($\impliedby$): すべての対象が J_{can} -コンパクトであると仮定する。 $S \in J_{can}(X)$ をとると、定義より有限部分族 $F \subset S$ が存在し $\langle F \rangle \in J_{can}(X)$ となる。定理2.2より $\langle F \rangle$ は普遍的有効エピふりであるため、特に $X \cong \text{colim}_{f \in \langle F \rangle} \text{dom}(f)$ が成り立つ。有限部分族 F がこの余極限を生成するため、Barr完全圏の性質によりコプロダクト射 $\coprod_{f \in F} \text{dom}(f) \rightarrow X$ は正則エピ射となる。したがって F は結合的に全射であり、 $S \in J_{coh}(X)$ が成り立つ。

証明終

この定理により、問題は「いかにして対象が J_{can} -コンパクトであることを圏論的に証明するか」に帰着される。**CHaus** における証明は、実は「代数と幾何の双対性 (Categorical Duality)」を用いた証明の具体的な実現に他ならない。

概念 5.3: 代数と幾何の双対性による抽象化 (Gelfand / Stone Duality)

Gelfand双対性により、コンパクトHausdorff空間の圏 **CHaus** の双対圏 **CHaus**^{op} は、可換単位的 C^* -代数の圏 **cC*Alg** と圏同値になる。このとき、空間 X は連続関数のなすBanach環 $C(X, \mathbb{C})$ と対応する。

圏論的双対性のもとでは、幾何的な空間の圏 $\mathcal{C}$ における有効エピふり (余極限図式) は、代数の圏 $\mathcal{A}$ における極限図式 (limit diagram) へと変換される。

第4部の定理4.2の証明において、有向点族とその超極限を用いてコンパクト空間 Y を引き戻しとして構成した操作は、まさに代数側における極限の保存と局所情報の統合（米田の補題の適用）を幾何学的に言い換えた構造そのものである。このように、トポス理論における幾何学的性質は、双対圏における代数的な有限性（有限交叉性やイデアルの極大性）へと純粋に抽象化される。

この双対性のアプローチが一般の圏論でいかに強力に機能するかを示すため、プロ有限空間 (Stone空間) の圏 **Stone** における $J_{can} = J_{coh}$ の証明を、双対であるBoole代数の圏 **Bool** を用いて純粋に代数的に実行する。

一般化の例 5.4: Stone空間の圏における圏論的・代数的証明

Stone を完全不連結(totally disconnected)なコンパクトHausdorff空間の圏とする。Stone双対性により $\mathbf{Stone}^{op} \simeq \mathbf{Bool}$ (Boole代数の圏) である。

証明:

対象 $X \in \mathbf{Stone}$ 上の任意の普遍的有効エピふるい $S \in J_{can}(X)$ をとる。 X はあるBoole代数 B に対応する。双対性により、 S は **Bool** における B を頂点とする極限図式、特に**有効モノコシーブ (effective monomorphic cosieve)** に対応する。Boole代数は代数多様体 (variety of algebras) をなすため、すべてのモノ射は有効である。したがって、このコシーブは B から様々な商代数 B/I_α (ここで I_α はイデアル) への全射準同型の族 $\{\pi_\alpha : B \rightarrow B/I_\alpha\}$ であり、これが極限 (直積への埋め込み) になるということは、イデアルの共通部分がゼロであることを意味する。

$$\bigcap_{\alpha} I_\alpha = \{0\}$$

ここで背理法を用いる。このコシーブがいかなる有限部分コシーブも有効にしないと仮定する。すなわち、いかなる有限個のイデアルの共通部分もゼロにならないと仮定する。

Boole代数において、任意の有限共通部分が $\{0\}$ にならないようなイデアルの族 $\{I_\alpha\}$ は、有限交叉性 (finite intersection property) を持つフィルターと双対的な「真のイデアル」を生成する。Zornの補題により、これはある極大イデアル $\mathfrak{m} \subset B$ に含まれる。

すると、すべての α について $I_\alpha \subset \mathfrak{m}$ となる。この極大イデアル $\mathfrak{m}$ に対応する元 $e \in B$ ($e \notin \mathfrak{m}$) はゼロではないが、各商代数 B/I_α に射影するとゼロになり、全体を統制する極限の性質に矛盾を引き起こす (幾何学的には、すべての像が被覆できないある「点」が残ることに相当する)。

代数的な有限交叉性の定理により矛盾が導かれるため、必ず有限個の $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ で $\bigcap_{k=1}^n I_{\alpha_k} = \{0\}$ とならなければならない。テキストの対応関係から、これは元の **Stone** において、有限部分族の射の像が X 全体を覆うこと、すなわち $S \in J_{coh}(X)$ を意味する。

ゆえに **Stone** において $J_{can} = J_{coh}$ であることが純粋に代数的・圏論的に証明された。

証明終

参考文献

- Johnstone, P. T. (1982). *Stone Spaces*. Cambridge University Press.
- Johnstone, P. T. (2002). *Sketches of an Elephant: A Topos Theory Compendium, Volumes 1, 2*. Oxford University Press.
- Mac Lane, S., & Moerdijk, I. (1992). *Sheaves in Geometry and Logic: A First Introduction to Topos Theory*. Springer-Verlag.